Ecricome 2005, option S. (avec programme pascal modifié)

EXERCICE 1

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels a, b, c étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1) Déterminer trois matrices I, J, K dont les coefficients ne dépendent pas de a, b, c, telles que :

$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK$$

Calculer J^2, K^2 et K^3. Déterminer une relation entre I, J et K^2, ainsi qu'un polynôme annulateur de K.
Quelles sont les valeurs propres possibles de K ?

2) Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telle que $D = ({}^tP)KP$ soit une matrice diagonale.
Déterminer P et D vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{1,1} < d_{2,2} < d_{3,3}$ (où $d_{i,j}$ est le coefficient d'indices i, j de D.)

3) En écrivant $M = M(a,b,c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice $({}^tP)MP$.
En déduire les valeurs propres de la matrice M.
Discuter suivant les valeurs de a, b, c le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

4) On suppose dans cette question $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ et on note $M = M(4, 2, \sqrt{2})$.
On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par :

$$f(x,y,z) = \frac{({}^tX)MX}{\|X\|^2}$$

i. Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que :

$$f(x,y,z) = \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de f sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

b) On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

i. Soit B une solution de l'équation (s'il en existe). Montrer que B et M commutent.
En déduire que si X appartient au sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ, alors BX appartient aussi à E_λ.
Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B.
Justifier alors que $\Delta = ({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = ({}^tP)MP$ d'inconnue Δ et donner le nombre de solutions de l'équation $B^2 = M$.

EXERCICE 2

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geqslant 0 \quad ; \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

1) Montrer que pour tout entier n, $\quad u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2)a) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x)$.

b) En déduire que pour tout entier n, $\quad u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

3) On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. A l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1})$.
Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geqslant N_0$ alors $u_n \geqslant u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5) Ecrire en langage Pascal une fonction récursive ayant pour nom `suite` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

PROBLÈME

X et Y étant deux variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, admettant pour densités respectives f_X et f_Y, on rappelle que la fonction h définie par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$$

est une densité de la variable aléatoire $X + Y$.

Partie I : Un calcul d'intégrale.

1) Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge où

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$$

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha$$

En déduire que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1 on a :

$$J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} J_\alpha$$

3) Calculer J_1.
Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité. Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$. (On pourra, en justifiant sa validité, utiliser le changement de variables $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$).

2) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f_n. (On dira que X suit une loi de Student à n degrés de liberté).

a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.

b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$, exprimer $V(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que :

$$V(X) = \frac{n}{n-2}$$

Lorsque $n = 1$ la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle loi de Cauchy et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

Partie III : Simulation d'une loi.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M. On suppose que θ, mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan\theta$. En déduire que $\tan\theta$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.

2) Exprimer Y, variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M, en fonction de θ. Reconnaître la loi de Y.

3) On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. On considère le programme informatique suivant :

```
program simu ;
var u,x:real ;
begin
  randomize ;
  u:=random ;
  x :=sin(pi*u-pi/2)/cos(pi*u-pi/2) ;
end.
```

Quelle loi de probabilité ce programme permet-il de simuler ? Expliquer.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.

a) On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f continue sur $\mathbb{R}$.

Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f et montrer que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.

On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f.

b) Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g, et que Y et $-Y$ ont la même loi. Montrer que, pour tout réel x, $P([Y = x]) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$.
Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x. (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$).
En déduire que Y est une variable à densité et exprimer une densité f de Y en fonction de g.

2) Soit c un réel strictement positif. A l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^{2t}$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2t} \mathrm{e}^{-\frac{c\mathrm{e}^{2t}}{2}} \, \mathrm{d}t$$

converge et la calculer.

3) Soient X et X' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de même densité φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

a) Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln|X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

b) Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln\left|\frac{X}{X'}\right|$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

c) Déterminer une densité de la variable aléatoire $\left|\frac{X}{X'}\right|$ puis reconnaître la loi de $\frac{X}{X'}$.